

Processamento de Malhas Poligonais

Tópicos Avançados em Computação Visual e Interfaces I

Prof.: Marcos Lage

www.ic.uff.br/~mlage

mlage@ic.uff.br

Modificado por Anselmo Montenegro em 20-09-15

Figuras incluídas dos slides livro texto em <http://>

www.pmp-book.org/

Conteúdo: Notas de Aula

Suavização

Introdução

Introdução

De forma geral, suavização em malhas lida com a criação e o cálculo de funções suaves $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sobre uma malha de polígonos.

Introdução

De forma geral, suavização em malhas lida com a criação e o cálculo de funções suaves $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sobre uma malha de polígonos.

Obs: A maioria esmagadora de trabalhos utilizam malhas de triângulos.

Introdução

De forma geral, suavização em malhas lida com a criação e o cálculo de funções suaves $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sobre uma malha de polígonos.

Obs: A maioria esmagadora de trabalhos utilizam malhas de triângulos.

A função f pode ser vista como a posição dos vértices, coordenadas de texturas ou deslocamento de vértices.

Introdução

De forma geral, suavização em malhas lida com a criação e o cálculo de funções suaves $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sobre uma malha de polígonos.

Obs: A maioria esmagadora de trabalhos utilizam malhas de triângulos.

A função f pode ser vista como a posição dos vértices, coordenadas de texturas ou deslocamento de vértices.

Técnicas de suavização podem ser aplicadas em algoritmos de parametrização, remalhamento e deformação, por exemplo.

Introdução

De forma geral, suavização em malhas lida com a criação e o cálculo de funções suaves $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sobre uma malha de polígonos.

A suavização de malhas pode ser discutida sob dois aspectos:

Denoising e **Fairing**

Introdução

De forma geral, suavização em malhas lida com a criação e o cálculo de funções suaves $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sobre uma malha de polígonos.

Denoising: Utilizada para a remoção de ruídos de alta frequência da função f .

Ex: A função de interesse é a que descreve as coordenadas dos vértices da malha, que por sua vez podem estar corrompidos por ruídos de alta frequência provenientes do processo de aquisição.

Introdução

De forma geral, suavização em malhas lida com a criação e o cálculo de funções suaves $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sobre uma malha de polígonos.

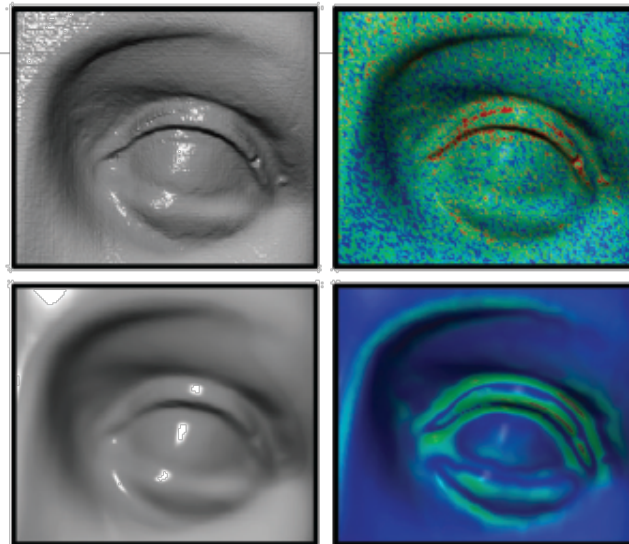
Denoising: Utilizada para a remoção de ruídos de alta frequência da função f .

Ex: A função de interesse é a que descreve as **coordenadas dos vértices** da malha, que podem estar corrompidos por ruídos provenientes do **processo de aquisição**.

Introdução

De forma geral, suavização em malhas lida com a criação e o cálculo de funções suaves $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sobre uma malha de polígonos.

Denoising: Utilizada para a remoção de ruídos de alta frequência da função f .



Introdução

De forma geral, suavização em malhas lida com a criação e o cálculo de funções suaves $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sobre uma malha de polígonos.

Fairing: Tem por objetivo não apenas suavizar a superfície, mas sim obter a superfície mais suave possível.



Transformada de Fourier 1D

Ferramenta clássica para se analisar o **espectro de frequências** de um sinal.

Transformada de Fourier 1D

Ferramenta clássica para se analisar o **espectro de frequências** de um sinal.

Permite a **implementação eficiente** de filtros que permitam a passagem de baixas frequências, conhecidos como filtros **passa-baixas**.

Transformada de Fourier 1D

Ferramenta clássica para se analisar o **espectro de frequências** de um sinal.

Permite a **implementação eficiente** de filtros que permitam a passagem de baixas frequências, conhecidos como filtros **passa-baixas**.

Começaremos por estudando filtros para funções de uma variável e em seguida passaremos para funções definidas sobre os vértices da malha.

Transformada de Fourier 1D

Def: A transformada de Fourier mapeia uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ da sua representação espacial $f(x)$ para a sua representação no espaço de frequências $F(\omega)$.

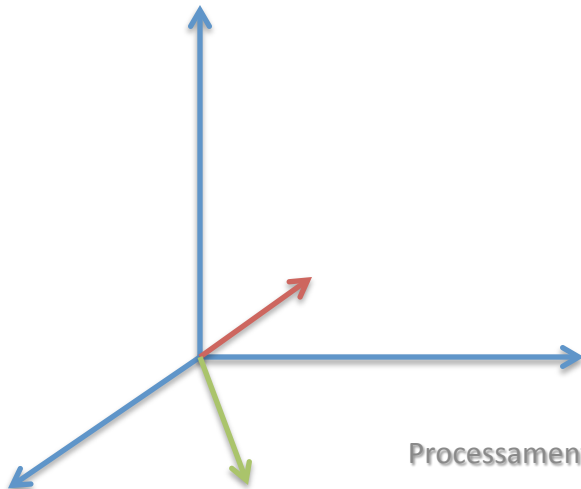
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx,$$
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega.$$

Transformada de Fourier 1D

Def: A transformada de Fourier mapeia uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ da sua representação espacial $f(x)$ para a sua representação no espaço de frequências $F(\omega)$.

Idéia geométrica:

Suponha que podemos calcular o produto interno entre elementos deste espaço.



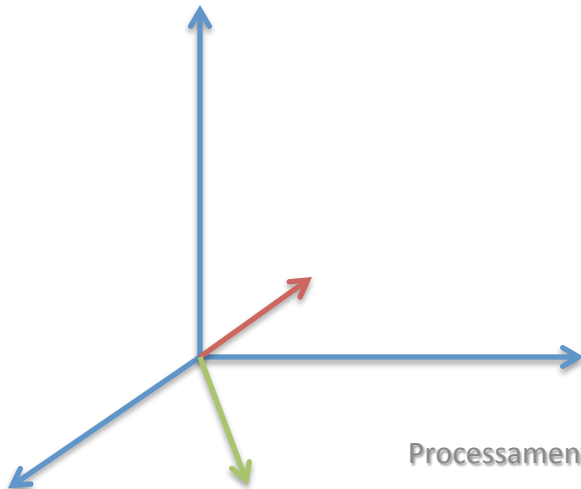
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

Transformada de Fourier 1D

Def: A transformada de Fourier mapeia uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ da sua representação espacial $f(x)$ para a sua representação no espaço de frequências $F(\omega)$.

Idéia geométrica:

As exponenciais complexas pertencem ao espaço em questão.



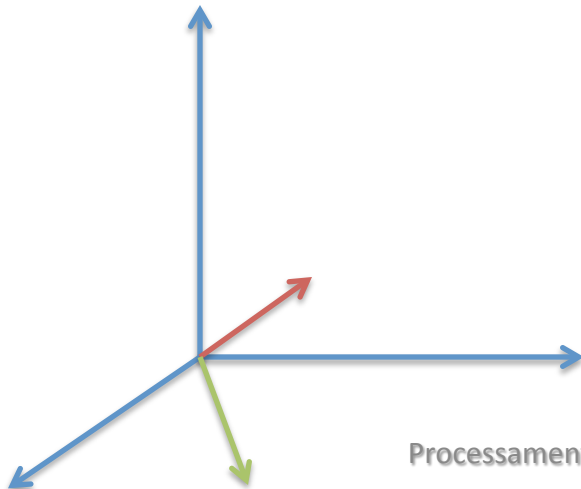
$$\begin{aligned} e_{\omega}(x) &:= e^{2\pi i \omega x} \\ &= \cos(2\pi \omega x) - i \sin(2\pi \omega x) \end{aligned}$$

Transformada de Fourier 1D

Def: A transformada de Fourier mapeia uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ da sua representação espacial $f(x)$ para a sua representação no espaço de frequências $F(\omega)$.

Idéia geométrica:

São ondas complexas de frequência ω , e formam uma base para o espaço em questão.



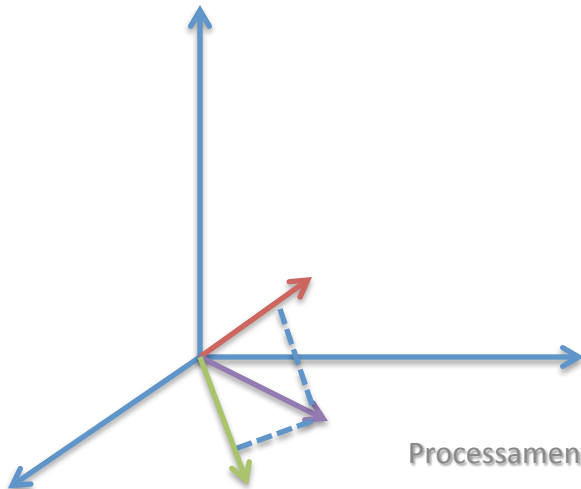
$$\begin{aligned} e_{\omega}(x) &:= e^{2\pi i \omega x} \\ &= \cos(2\pi \omega x) - i \sin(2\pi \omega x) \end{aligned}$$

Transformada de Fourier 1D

Def: A transformada de Fourier mapeia uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ da sua representação espacial $f(x)$ para a sua representação no espaço de frequências $F(\omega)$.

Idéia geométrica:

A transformada de Fourier é então uma mudança de base ...



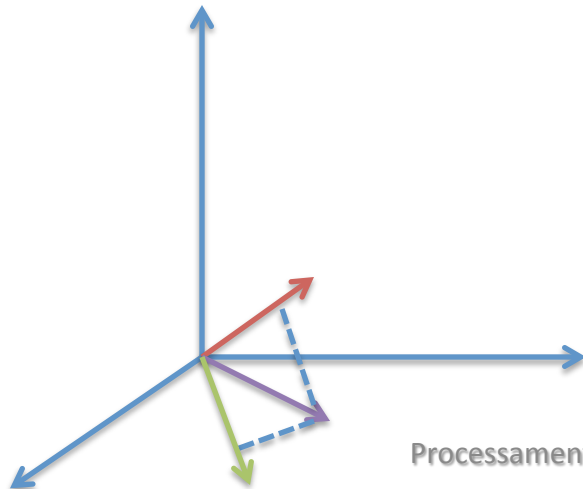
$$f(x) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \langle f, e_{\omega} \rangle e_{\omega}.$$

Transformada de Fourier 1D

Def: A transformada de Fourier mapeia uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ da sua representação espacial $f(x)$ para a sua representação no espaço de frequências $F(\omega)$.

Idéia geométrica:

Em outras palavras, é a projeção ortogonal de $f(x)$ na base e_ω .



$$f(x) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle f, e_\omega \rangle}_{F(\omega)} e_\omega.$$

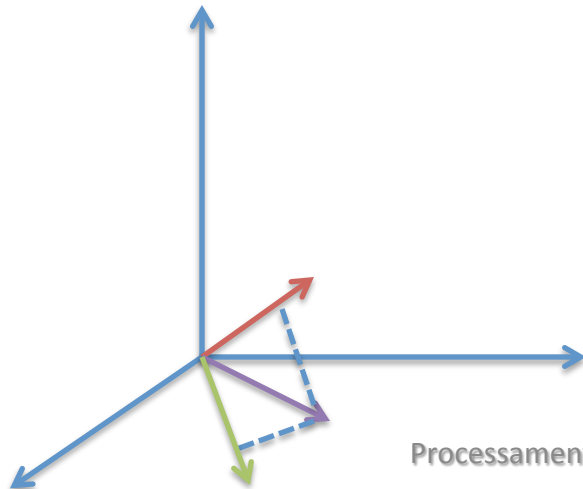
$F(\omega)$

Transformada de Fourier 1D

Def: A transformada de Fourier mapeia uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ da sua representação espacial $f(x)$ para a sua representação no espaço de frequências $F(\omega)$.

Idéia geométrica:

Podemos medir quanto da base e_ω está contido na função $f(x)$.



$$f(x) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle f, e_\omega \rangle}_{F(\omega)} e_\omega.$$

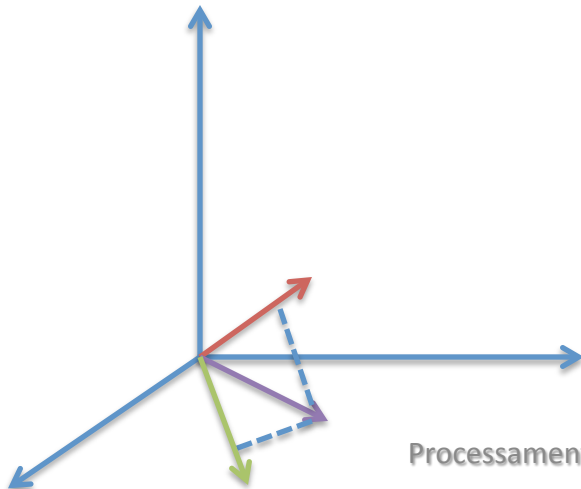
$F(\omega)$

Transformada de Fourier 1D

Def: A transformada de Fourier mapeia uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ da sua representação espacial $f(x)$ para a sua representação no espaço de frequências $F(\omega)$.

Idéia geométrica:

Podemos medir a amplitude da frequência ω no sinal $f(x)$.



$$f(x) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle f, e_{\omega} \rangle}_{F(\omega)} e_{\omega}.$$

$F(\omega)$

Transformada de Fourier 1D

Def: A transformada de Fourier mapeia uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ da sua representação espacial $f(x)$ para a sua representação no espaço de frequências $F(\omega)$.

Como ω assume valores reais, a soma da equação anterior é de fato uma integral.

Transformada de Fourier 1D

Def: A transformada de Fourier mapeia uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ da sua representação espacial $f(x)$ para a sua representação no espaço de frequências $F(\omega)$.

Como ω assume valores reais, a soma da equação anterior é de fato uma integral.

Podemos implementar um filtro passa-baixas simplesmente limitando os valores da frequência:

$$\tilde{f}(x) = \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} \langle f, e_{\omega} \rangle e_{\omega} d\omega.$$

Manifold Harmonics

Como transpor a teoria para funções definidas sobre a superfície?

$$f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

Manifold Harmonics

Como transpor a teoria para funções definidas sobre a superfície?

$$f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

A transformada de Fourier não pode ser aplicada diretamente a funções definidas sobre a superfície, mas podemos utilizar o seguinte fato:

$$\Delta(e^{2\pi i \omega x}) = \frac{d^2}{dx^2} e^{2\pi i \omega x} = -(2\pi \omega)^2 e^{2\pi i \omega x}.$$

Manifold Harmonics

Como transpor a teoria para funções definidas sobre a superfície?

$$f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

A transformada de Fourier não pode ser aplicada diretamente a funções definidas sobre a superfície, mas podemos utilizar o seguinte fato:

$$\Delta(e^{2\pi i \omega x}) = \frac{d^2}{dx^2} e^{2\pi i \omega x} = -(2\pi \omega)^2 e^{2\pi i \omega x}.$$

Ou seja, a base de Fourier é uma autofunção do operador Laplaciano.

Manifold Harmonics

Como transpor a teoria para funções definidas sobre a superfície?

$$f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

A transformada de Fourier não pode ser aplicada diretamente a funções definidas sobre a superfície, mas podemos utilizar o seguinte fato:

$$\Delta(e^{2\pi i \omega x}) = \frac{d^2}{dx^2} e^{2\pi i \omega x} = -(2\pi \omega)^2 e^{2\pi i \omega x}.$$

Ou seja, a base de Fourier é uma autofunção do operador Laplaciano.

Manifold Harmonics

Como transpor a teoria para funções definidas sobre a superfície?

$$f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

É natural usar as autofunções da versão discreta do operador Laplaciano para generalizar as funções base de Fourier.

Manifold Harmonics

Como transpor a teoria para funções definidas sobre a superfície?

$$f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

Sabemos que o Laplaciano de uma função definida sobre a malha é:

$$\Delta f(v_i) = \sum_{v_j \in \mathcal{N}_1(v_i)} w_{ij} (f(v_j) - f(v_i)).$$

Manifold Harmonics

Como transpor a teoria para funções definidas sobre a superfície?

$$f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

Escrevendo matricialmente ...

$$\begin{pmatrix} \Delta f(v_1) \\ \vdots \\ \Delta f(v_n) \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix}.$$

Manifold Harmonics

Como transpor a teoria para funções definidas sobre a superfície?

$$f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$$

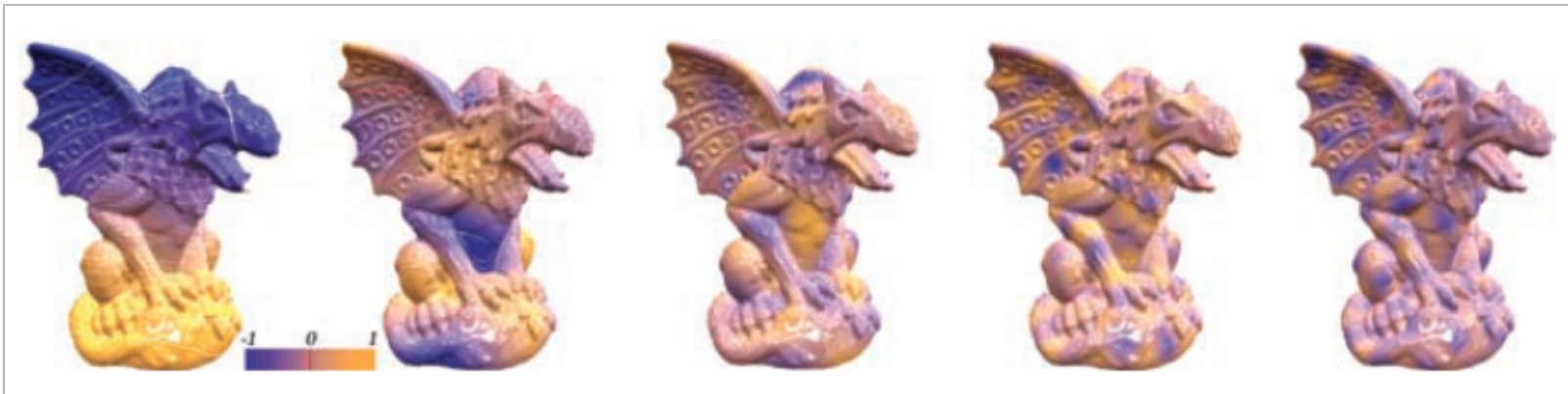
Escrevendo matricialmente ...

$$\begin{pmatrix} \Delta f(v_1) \\ \vdots \\ \Delta f(v_n) \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix}.$$

As autofunções do operador Laplaciano são os autovetores da matriz \mathbf{L} .

Manifold Harmonics

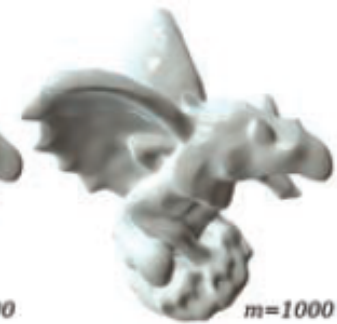
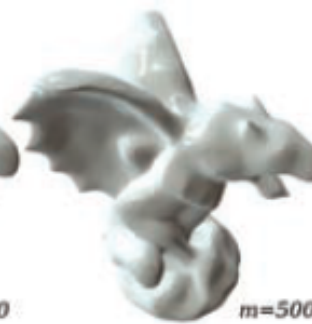
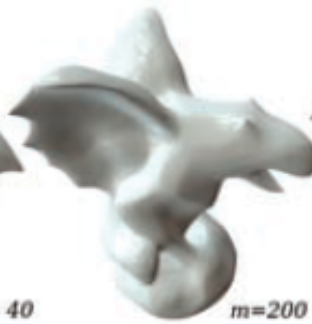
A entrada de índice k do autovetor i corresponde à amplitude da onda e_i no vértice de índice k .



Manifold Harmonics

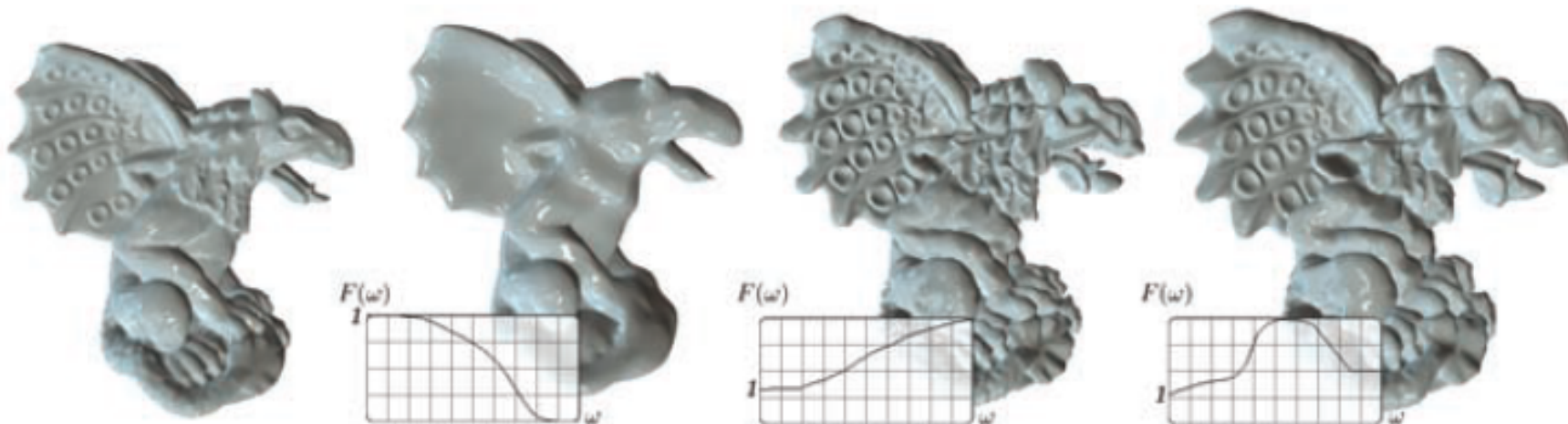
Utilizando os $m < n$ primeiros autovetores do matriz Laplaciana, podemos construir um filtro passa-baixas para uma função definida sobre a malha:

$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^m \langle e_i, f \rangle e_i.$$



Manifold Harmonics

Podemos também enfatizar determinadas frequências ...



Manifold Harmonics

Autovalores da matriz laplaciana correspondem a frequências

O processo de suavização consiste em reconstruir usando apenas os autovetores (autofunções) correspondente aos menores autovalores (frequências)

A decomposição em espectral é usada para modificar (deformar) a malha:

- **Uso direto é custoso computacionalmente**
- **Difícil calcular os autovalores de uma matriz imensa**

Na prática pode-se utilizar outra técnica: Difusão

Diffusion Laplacian

Equação de difusão:

diffusion constant

$$\frac{\partial}{\partial t} x = \mu \Delta x$$

Laplace operator

Diffusion Laplacian

Discretização da equação de difusão:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_i = \mu \Delta p_i$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} \cong \frac{p'_i - p_i}{\Delta t} \quad \Delta p_i = \sum_{v \in N(p)} (v - p_i)$$

$$p'_i = p_i + \mu dt \Delta p_i$$

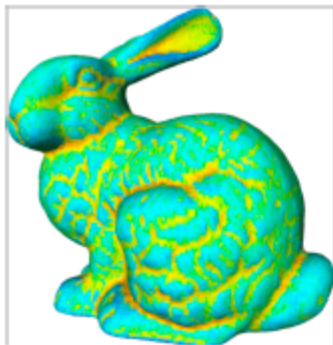
Diffusion Laplacian

Algoritmo (*Integração de Euler*):

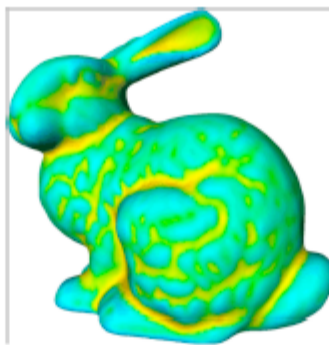
Enquanto um critério de convergência não for satisfeito:

$$\text{Iterar } p'_i = p_i + \mu dt \Delta p_i$$

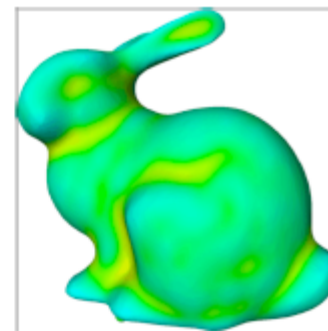
Diffusion Laplacian



0 Iterations



5 Iterations



20 Iterations

Minimização de Energia

Formulação do problema de reconstruir uma forma suave

Utiliza uma medida de “suavidade”

A medida de suavidade é baseada em princípios físicos:

“O melhor modelo é o mais simples”

Formulação do problema através de minimização de energia:

exemplos: *membrane / thin plate energy*

Minimização de Energia

Problema original (*energia de membrana*):

Seja $x: \Omega \rightarrow S$ uma função paramétrica

$$\text{Minimizar } E_M(x) = \iint_{\Omega} \sqrt{\det(I)} \, dudv$$

$$\text{s.a } x(\partial\Omega) = f$$

Funcional mede a área da superfície

Resultado é a *superfície da membrana* ou *superfície mínima*

Minimização de Energia

Resolução do problema de encontrar a superfície mínima é difícil

Funcional não linear

Alternativa: Energia de Dirichlet

Minimização de Energia de Dirichlet

Seja $x : \Omega \rightarrow S$ uma função paramétrica

$$\text{Minimizar } E_M(x) = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial x}{\partial u} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial x}{\partial v} \right\|^2 dudv$$

$$\text{s.a } x(\partial\Omega) = f$$

Problema de cálculo variacional

Solução baseada nas equações de *Euler-Lagrange*

Intuição do problema variacional

Problema unidimensional

Minimizar $E(f) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx$

s.a $f(a) = c, f(b) = d$

Intuição do problema variacional

Problema unidimensional

Minimizar $E(f) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx$

s.a $f(a) = c, f(b) = d$

Considere uma função u , tal que $u(a)=u(b) = 0$

Se f^* minimiza $E(f)$ então $E(f^*) < E(f^* + \lambda u)$

Intuição do problema variacional

Logo $E(f)$ tem mínimo em $\lambda=0$

Deste modo,

$$\left. \frac{\partial E(f + \lambda u)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \int_a^b 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\int_a^b 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} u \Big|_a^b - \int_a^b 2 \frac{\partial f^2}{\partial^2 x} u = 0$$

$$\int_a^b \frac{\partial f^2}{\partial^2 x} u = 0$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial^2 x} = \Delta F = 0$$

Solução para a energia de Dirichlet

Para o problema de minimização da Energia de Dirichlet pode-se utilizar ideia similar

A solução é dada por $\Delta x(u, v) = 0$

Para (u, v) em Ω

Formulação discreta para minimização da Energia de Dirichlet

Substituir a função de coordenadas $x(u,v)$ por um vetor de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)^T$

Utilizando o operador Laplace-beltrami discreto chega-se a um sistema de equações

$$Lx=0$$

A solução normalmente é via métodos iterativos (Jacobi, Gauss-Seidel, Gradiente Conjugado)

Outras energias

Thin-Plate Energy

$$\int_{\Omega} \|P_{uu}\|^2 + 2 \|P_{uv}\|^2 + \|P_{vv}\|^2 dudv \rightarrow \min$$

Solução variacional discretizada $L^2\mathbf{x}=\mathbf{0}$

Curvature Variation

$$E_M(x) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial k_1}{\partial t_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial k_2}{\partial t_2} \right)^2 dudv \rightarrow \min$$

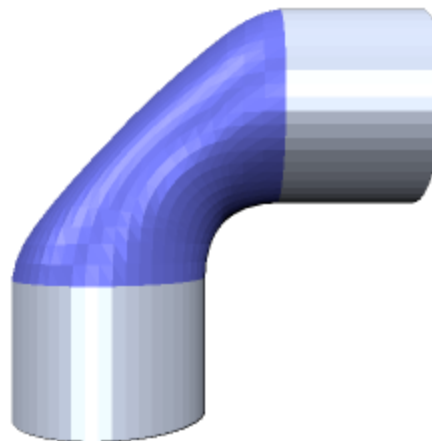
Solução variacional discretizada $L^3\mathbf{x}=\mathbf{0}$

Suavização por minimização de energia



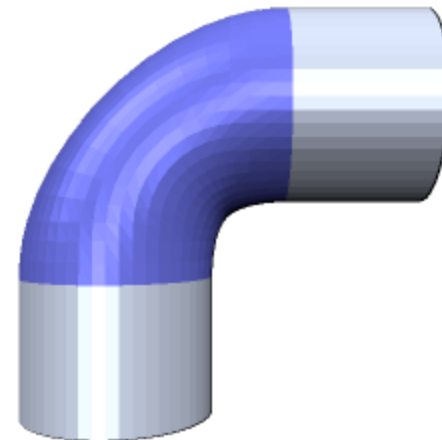
Membrane

$$\Delta_{SP} = 0$$



Thin Plate

$$\Delta_{SP}^2 = 0$$



$$\Delta_{SP}^3 = 0$$

Referências adicionais

- Taubin: *A signal processing approach to fair surface design*, SIGGRAPH 1996
- Desbrun, Meyer, Schroeder, Barr: *Implicit Fairing of Irregular Meshes using Diffusion and Curvature Flow*, SIGGRAPH 99
- Botsch, Kobbelt: *An Intuitive Framework for Real-Time Freeform Modeling*, SIGGRAPH 2004
- Fleishman, Drori, Cohen-Or: *Bilateral mesh denoising*, SIGGRAPH 2003
- Jones, Durand, Desbrun: *Non-iterative feature preserving mesh smoothing*, SIGGRAPH 2003